Monika Jonczak
Elżbieta Ostaficzuk
Grażyna Śleszyńska

Innowacyjna_matematyka.norma_ czy_oksymoron.pl

Deszcz padał dalej i dalej, a woda każdego dnia wznosiła się coraz wyżej i wyżej, aż dosięgła prawie do okna Prosiaczka. A on, biedaczek, nic… „Weźmy takiego Puchatka – rozmyślał. – Nie ma on wiele Rozumu, a nigdy mu się nic złego nie przytrafia. Robi rozmaite głupstwa i zawsze się z nich jakoś wykaraska. Albo weźmy Sowę. Sowa właściwie też nie ma wiele Rozumu, ale za to jest Uczona. Wiedziałaby, co robić, gdy jest zewsząd otoczona wodą. Albo na przykład Królik. Ten znów nie uczył się z książek, ale mimo to zawsze potrafi coś Mądrego Wymyślić”.

A.A. Milne, „Kubuś Puchatek”

Mazowieckie Samorządowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli w ramach projektu edukacyjnego „Połowa drogi” zajmuje się diagnozowaniem umiejętności matematycznych uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Od 2010 roku wyniki sprawdzianów – jesiennego, przeprowadzanego wśród pierwszoklasistów, oraz wiosennego, testującego drugoklasistów – są wykorzystywane do stymulacji rozwoju indywidualnego uczniów, czyli rozwoju ich kapitału ludzkiego, jeśli zgodzimy się na postrzeganie edukacji jako jednego z sektorów gospodarki rynkowej.

Jaką metodę mierzenia zmian wartości kapitału ludzkiego w sektorze edukacji rekomendują nauczycielom matematyki realizatorzy projektu „Połowa drogi”?

Najprostszą metodą pomiaru wzrostu osiągnięć uczniów jest wyznaczanie edukacyjnej wartości dodanej. Badanie polega wówczas na szacowaniu przyrostu umiejętności uczniów w okresie między sprawdzianem jesiennym w I klasie a wiosennym w klasie II. Edukacyjna wartość dodana ilustruje rozwój klasy bądź szkoły. Mimo iż uczenie się jest rozumiane jako proces produkcyjny dotyczący ucznia, to jednak ta metoda nie pokazuje indywidualnego rozwoju kapitału ludzkiego.

Stymulacją rozwoju indywidualnego ucznia zajmuje się, rekomendowana od dwóch lat w projekcie „Połowa drogi”, metoda oceniania orientującego.

Kluczem do diagnozy i orientacji w poziomie osiągniętej przez ucznia kompetencji jest wartość wskaźnika łatwości, oceniającego poziom rozwiązania przez ucznia konkretnego zadania oraz badany tym zadaniem standard kompetencji matematycznej, równoważny ze standardem wymagań egzaminacyjnych (maturalnych). Analizując poziomy łatwości rozwiązanych przez ucznia zadań, nauczyciel matematyki wskazuje kierunki rozwoju – proponuje czynności i ćwiczenia, które uczeń powinien wykonać, aby osiągnąć umiejętności wymagane na sprawdzianie. Co więcej – po osiągnięciu wymaganego poziomu może zaproponować kierunek dalszego indywidualnego rozwoju, zgodnie ze standardami wymagań maturalnych na wyższym poziomie.

W ocenianiu orientującym najcenniejsza jest własna aktywność ucznia, który:

- sam planuje wykonanie wskazanych przez nauczyciela czynności/zadań,
- przewiduje rezultaty,
- ocenia osiągnięte rezultaty – rozwój swego kapitału ludzkiego, na przykład w skali 1-10 punktów,
- w końcu deklaruje swe przygotowanie i prosi nauczyciela o ocenę umiejętności.

Głównym celem projektu „Połowa drogi" jest stymulacja rozwoju każdego ucznia, a nie wyłącznie diagnostyczne podsumowanie umiejętności matematycznych uczniów.

Autorzy projektu „Połowa drogi" proponują nauczycielom zastosowanie w ocenianiu orientującym narzędzi myślowych TOC (*Theory of Constraints* – teoria ograniczeń), które mają za zadanie pomóc uczniom w planowaniu i ponoszeniu odpowiedzialności za własny rozwój naukowy.

Na przykładzie wybranych zadań[1] prezentujemy schematy komentarzy dydaktycznych, ułatwiających nauczycielom wskazywanie kierunków rozwoju indywidualnego uczniów.

Zadanie 1

Uczestnicy turnieju szachowego rozgrywali partie według zasady „każdy z każdym".

Uzupełnij tabelkę

Liczba uczestników turnieju	**Liczba wszystkich partii rozegranych przez jednego uczestnika**	**Liczba wszystkich partii rozegranych w turnieju**
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	
10		45
21	20	
n	n-1	

Za pomocą zad. 1. badane są umiejętności matematyczne:

Uczeń opisuje za pomocą wyrażenia algebraicznego związki między różnymi wielkościami.	**Stand. wymagań III**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 1

Standard III. Modelowanie	**Model (cz.1)**	**Model (2.1)**	**Model (2.2)**
	• Odkrycie, że dany zawodnik musi rozegrać partie ze wszystkimi pozostałymi i podanie odpowiedzi.	• Odkrycie, że w uporządkowanym (np. ponumerowanym) zbiorze zawodników każdy zawodnik musi jeszcze rozegrać partie z „następnymi po nim" zawodnikami. • Zapisanie wyrażenia wyznaczającego sumę wszystkich rozegranych partii (odkrycie wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego albo na liczbę kombinacji dwuelementowych).	np. wypisywanie wszystkich możliwości. **…**

[1] Informator o egzaminie gimnazjalnym 2011/2012, CKE, zad. 3; 5; 8.

WSKAZYWANIE KIERUNKU ROZWOJU INDYWIDUALNEGO

I. OBIEKT	• Odkrycie, ile partii musi rozegrać każdy zawodnik. • Odkrycie, że partia „zawodnik A gra z zawodnikiem B” zalicza się na konto partii już zagranych, zarówno zawodnikowi A, jak i zawodnikowi B (oczywiście A≠B).
II. REPREZENTACJA	
III. MODEL	• Odkrycie modelu matematycznego (wyrażenia) opisującego sumę wszystkich partii. • Sprawdzenie poprawności modelu w przypadkach opisanych w tabeli. • Wyznaczenie liczby partii w pozostałych przypadkach.
IV. STRATEGIA	• Czy istnieje inny model/strategia? • Czy w podobny sposób można opisać rozwiązanie innego problemu, np. liczba powitań (uścisków rąk) przy spotkaniu kilku osób?
V. ROZUMOWANIE	• Sformułowanie polecenia „Udowodnij, że…”, „Wykaż, że…”

Zadanie 2

Kod dostępu do komputera Andrzeja złożony jest z czterech kolejnych wielokrotności liczby 7 ustawionych od najmniejszej do największej. Suma tych wielokrotności wynosi 294. Znajdź liczby, z których utworzony jest ten kod. Zapisz swoje rozumowanie.

Za pomocą zad. 2. badane są umiejętności matematyczne:

Uczeń stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.	**Stand. wymagań IV**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 2

Standard IV. **Strategia rozwiązania**	**Strategia (1)** np. wypisywanie i sumowanie kolejnych wielokrotności.	**Strategia (2)** Wyznaczanie sumy jako wyniku dodawania do poprzednio wyznaczonej sumy stałej wielkości (28).	**Strategia (3)** **Rozwiązanie równania:** $7n+7(n+)+7(n+2)+7(n+3)=294$ … $n=9$ Odp. 63, 70, 77, 84	**Strategia (4)** …

WSKAZYWANIE KIERUNKU ROZWOJU INDYWIDUALNEGO

I. OBIEKT	• Spostrzeżenie, na czym polega wielokrotność liczby 7. • Spostrzeżenie, o ile różnią się kolejne cztery wielokrotności liczby 7. • Spostrzeżenie, jak to się zaznacza w sumie kolejnych czterech wielokrotności liczby 7. • Spostrzeżenie, o ile różnią się sumy czterech kolejnych wielokrotności liczby 7.
II. REPREZENTACJA	
III. MODEL	• Określenie modelu – wyrażenia opisującego sumę czterech kolejnych wielokrotności liczby 7.
IV. STRATEGIA	• Rozwiązanie równania. • Czy istnieje inny model/strategia?
V. ROZUMOWANIE	• Sformułowanie polecenia „Udowodnij, że…”, „Uogólnij rozumowanie…”, np. „Wyznacz dziewięciocyfrowy kod… a suma tych wielokrotności wynosi 378”.

Zadanie 3

W pudełku znajduje się 30 losów: 5 z tych losów jest wygrywających, 10 jest przegrywających, a wyciągnięcie jednego z pozostałych upoważnia do wyciągnięcia jeszcze jednego losu. Po wyciągnięciu los nie jest zwracany do pudełka. Pierwsza osoba, która brała udział w tej loterii, wyciągnęła los przegrywający. Czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe? Zaznacz właściwą odpowiedź.

I. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu wygrywającego wzrosło.

☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ

II. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu przegrywającego zmalało.

☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ

III. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez drugą osobę losu upoważniającego do ponownego losowania nie zmieniło się.

☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ

Za pomocą zad. 3. badane są umiejętności matematyczne:

Uczeń analizuje proste doświadczenia losowe i określa prawdopodobieństwo najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach.	**Stand. wymagań V**

ROZWIĄZANIE ZADANIA 3

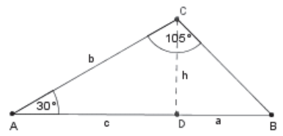
Standard V. Rozumowanie i argumentacja	**Rozumowanie (1)** Z opisu (np. w postaci drzewa) szans wylosowania poszczególnych typów losów uczeń ocenia wartość logiczną podanych zdań.	**Rozumowanie (2)** **…**

WSKAZYWANIE KIERUNKU ROZWOJU INDYWIDUALNEGO

I. OBIEKT **II. REPREZENTACJA**	• Spostrzeżenie, że szanse wyciągnięcia każdego z losów są jednakowe. • Opisanie „szans wyciągnięcia losu” jako proporcji liczby identycznych losów do liczby wszystkich losów. • Ocenianie wartości logicznej zdania.
III. MODEL	• Opisanie modelu losowania przez jedną osobę, na przykład w postaci drzewa. • Opisanie modelu losowania przez dwie kolejne osoby.
IV. STRATEGIA	• Opisanie gałęzi drzewa „szansami wyciągnięcia” różnych losów. • Czy istnieje inny model/strategia?
V. ROZUMOWANIE	• Wnioskowanie o prawdziwości zdań. • Sformułowanie innych poleceń w podobnym kontekście matematycznym, np. gdy dwie osoby losują równocześnie.

Zadanie 4[2]

Dwa kąty wewnętrzne trójkąta są równe 30° i 105°, a wysokość tego trójkąta poprowadzona do najdłuższego boku wynosi 4 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

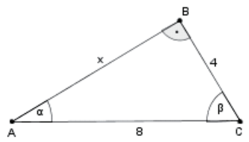
Zadanie ze standardu III. MODELOWANIE **ŁATWOŚĆ – 0,2**	• Wykonanie rysunku trójkąta i zaznaczenie kątów oraz podanej w zadaniu wysokości. • Odszukanie na rysunku dwóch trójkątów: o kątach 45°, 45°, 90°, oraz o kątach 30°, 60°, 90°. • Obliczenie pola trójkąta. • Doprowadzenie wyrażenia arytmetycznego do najprostszej postaci.	 $a = h = 4$ $b = 2h$ $c = \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ $P = \frac{(c+a)\cdot h}{2} = \frac{(4\sqrt{3}+4)4}{2}$ $= 2\cdot(4\sqrt{3}+4) = 8\cdot(\sqrt{3}+1)$

KIERUNEK ROZWOJU INDYWIDUALNEGO

Zaplanowane czynności/zadania (umiejętności potrzebne do rozwiązania zadania)	**PLAN ROZWOJU INDYWIDUALNEGO**		
	KIEDY? (ile czasu potrzebuję)	**Z KIM?** (kto mi pomoże)	**SAMOOCENA** (w skali 1-10)
Znaczenie precyzyjnego rysunku w rozwiązaniach zadań geometrycznych – wykonywanie poprawnego (czytelnego) rysunku, zaznaczanie na rysunku kluczowych dla zadania elementów			
Własności wysokości trójkąta			
Odczytywanie informacji zawartych na rysunku – odszukiwanie własności figur			
Zależności między bokami w trójkącie o kątach 45°, 45°, 90°			
Zależności między bokami w trójkącie o kątach 30°, 60°, 90°.			
Wzory na pole trójkąta			
Wykonywanie działań na pierwiastkach – doprowadzanie wyrażeń do najprostszej postaci			
Skracanie ułamków, skracanie ułamków algebraicznych			
Prawa działań na liczbach rzeczywistych			

[2] Zadanie ze sprawdzianu w projekcie „Połowa drogi”.

PROPOZYCJE ZADAŃ ROZWIJAJĄCYCH

IV. STRATEGIA	 • W trójkącie na rysunku podano pewne długości boków i miarę kąta. Na podstawie tych informacji podaj pozostałe długości boków oraz miary pozostałych kątów. • Kąt ostry rombu ma 60°, a dłuższa przekątna ma długość 12 cm. Wyznacz długość boku tego rombu oraz jego pole.
V. ROZUMOWANIE	• Sformułowanie polecenia „Udowodnij, że…”, „Wykaż, że…”, np. Jeden z boków trójkąta ma długość $1+\sqrt{3}$. Kąty przylegające do tego boku mają miary 30° i 45°. Uzasadnij, że pole tego trójkąta wynosi $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Zatem możliwe jest nauczanie matematyki, w którym planowanie indywidualnego rozwoju i odpowiedzialność za zdobyte osiągnięcia są w gestii każdego ucznia!

Bibliografia

1. Informator o egzaminie gimnazjalnym 2011/2012, CKE, Warszawa 2011.
2. Niemierko B., Walukiewicz S. *Jak mierzyć kapitał ludzki? Ewaluacyjne perspektywy operacjonalizacji pojęć ekonomicznych* [w:] *Ewaluacja w edukacji: koncepcje, metody, perspektywy.* Materiały z XVII Konferencji Diagnostyki Edukacyjnej, Kraków 2011.
3. Ostaficzuk E., Komorowska A. *Już „Połowa drogi”, a jeszcze tyle chcę osiągnąć!* [w:] *Edukacja Jutra*. Materiały z Sympozjum Naukowego, Zakopane 2011.
4. www.polowadrogi.mscdn.pl

Autorki są nauczycielami konsultantami w Mazowieckim Samorządowym Centrum Doskonalenia Nauczycieli

W samej naturze kondycji ludzkiej leży to,
że każde nowe pokolenie wzrasta w starym świecie,
w związku z czym przygotowanie nowego pokolenia
dla nowego świata może znaczyć jedynie to, że chce się wytrącić z rąk
przybyszów ich własną szansę na to, co nowe.

Hannah Arendt, „Między czasem minionym a przyszłym”